

ЛШ олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии
МАТЕМАТИКА, ШКОЛЬНЫЙ ТУР
Таллинн, 2 декабря 2005 года
XII класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найди четыре числа, из которых три первых числа являются последовательными членами геометрической прогрессии, а три последних являются последовательными членами арифметической прогрессии, причём сумма первого и четвёртого чисел равна 32, а сумма второго и третьего чисел равна 24.
2. Туристический лагерь находится в лесу на расстоянии 9 км от ближайшей точки прямолинейного участка шоссе. Расстояние от этой точки до ближайшего населённого пункта, находящегося на этом участке шоссе, составляет 15 км. Найди наименьшее время, за которое туристы доберутся до населённого пункта, если скорость туристов при движении по шоссе равна 5 км/ч, а при движении по лесу 4 км/ч.
3. Вычисли без помощи калькулятора значение выражения $\frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \frac{\log_3 216}{\log_8 3}$.
4. Основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC на гипотенузу AB является точка H . Отрезки HK и HL являются высотами треугольников AHC и BHC соответственно. Площадь треугольника ABC равна S , а площадь четырёхугольника $CKHL$ равна T . Докажи, что $T = 8S^3$, если длина гипотенузы равна 1.
5. На плоскости начертили множество несовпадающих друг с другом прямых. Для каждой прямой подсчитали количество точек пересечения с другими прямыми и полученные числа сложили. Суммой оказалось число 111.
 - i. Юку утверждает, что на плоскости должно быть по меньшей мере 12 прямых. Прав ли Юку?
 - ii. Ещё Юку утверждает, что найдутся по меньшей мере три прямые, которые пересекаются в одной точке. Прав ли Юку на этот раз?